Γραμμική Άλγεβρα 1 27/10/15

Ορισμός: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \mu}$ και $i \in \{1, 2, \dots \nu\}$ έτσι ώστε η i-γραμμή του A δεν έχει όλα τα στοιχεία ίσα με 0_F. Το αρχικό στοιχείο (ή ηγετικό στοιχείο της i-γραμμής του A) είναι το πρώτο στοιχείο από τα αριστερά αυτής της γραμμής που είναι μη μηδενικό.

Παράδειγμα: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$. Το αρχικό στοιχείο της 1ης γραμμής είναι το 3 που βρίσκεται στην θέση (1,2) του A, ενώ το αρχικό στοιχείο της 2ης γραμμής είναι το 5 που βρίσκεται στη θέση (2,3) του A.

Ορισμός: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \mu}$. Ο A λέγεται κλιμακωτός αν:

i) Το αρχικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής του A είναι ίσο με 1_F.

ii) Αν μια γραμμή του A είναι μηδενική, τότε και κάθε επόμενη γραμμή του A, είναι μηδενική.

iii) Το αρχικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής του A βρίσκεται γνήσια δεξιά του ηγετικού στοιχείου κάθε προηγούμενης γραμμής.

Αναδιατύπωση του ii) Δεν υπάρχουν μηδενικές γραμμές στο A, ή υπάρχουν και κάθε μη μηδενική γραμμή του A είναι πάνω από κάθε μηδενική γραμμή του A.

Παράδειγμα: Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός.

Ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι κλιμακωτός (το ii δεν ισχύει)

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι κλιμακωτός

γιατί δεν ικανοποιεί το iii του ορισμού

Ορισμός: Έστω $A \in F^{\nu \times k}$. Ο A λέγεται ΙΣΧΥΡΑ ΚΛΙΜΑΚΩΤΟΣ (ή ανηγμένως κλιμακωτός) αν είναι κλιμακωτός και το ηγετικό (ή αρχικό) στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής του A είναι το <u>μοναδικό</u> μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία βρίσκεται.

Παράδειγμα: Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός αλλά <u>όχι</u> ισχυρά κλιμακωτός γιατί το αρχικό στοιχείο 1 της 2ης γραμμής (που) είναι στη θέση (2,3), δεν είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της 3ης στήλης του B.

Παράδειγμα: Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ είναι ισχυρά κλιμακωτός.

Παράδειγμα: $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = b \quad b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{4\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} x_2 + 2x_4 &= b_1 \\ x_3 + 3x_4 &= b_2 \\ 0 &= b_3 \end{aligned}$$

Αν $b_3 \neq 0$ σύστημα αδύνατο (γιατί $0 = b_3$ αντίφαση)

Αν $b_3 = 0$ $\begin{cases} x_2 + 2x_4 = b_1 \\ x_3 + 3x_4 = b_2 \end{cases}$

x_1, x_4 παίρνουν οποιασδήποτε τιμές και τότε υπάρχουν <u>μοναδικές</u> τιμές για x_2, x_3

δηλ. $x_2 = b_1 - 2x_4$ κ' $x_3 = b_2 - 3x_4$

Σύνολο λύσεων (για $b_3 = 0$) είναι $\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ b_1 - 2\xi_4 \\ b_2 - 3\xi_4 \\ \xi_4 \end{pmatrix} : \xi_1, \xi_4 \in \mathbb{R} \right\}$

Αλγόριθμος απαλοιφής GAUSS.

Έστω $A \in F^{\nu\cdot\mu}$. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΕΕΣ:

Βήμα 1. Από τον A καταλήγουμε με γραμμοπράξεις σε πίνακα $C \in F^{\nu\cdot\mu}$ κλιμακωτό.

Βήμα 2. Από τον C με γραμμοπράξεις καταλήγουμε σε πίνακα $D \in F^{\nu\cdot\mu}$ ισχυρά κλιμακωτό.

→ Παρατήρηση!

Παράδειγμα: Ο $I_\nu \in F^{\nu\cdot\nu}$ είναι ισχυρά κλιμακωτός.

Βήμα 1ο - Περιγραφή

Αν $A = \mathbb{O}_{\nu\cdot\mu}$ έχουμε τελειώσει (Θέτουμε $C = \mathbb{O}_{\nu\cdot\mu}$)

Έστω $A \neq \mathbb{O}_{\nu\cdot\mu}$

Υποβήμα 1: Με εναλλαγή γραμμών παίρνουμε

$$\begin{array}{c} \text{ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΣΤΗΛΕΣ} \\ A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha'_{1k} & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \\ & & & & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \end{bmatrix} \end{array}$$

με $\alpha'_{1k} \neq 0_F$

Υποβήμα 2: Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή του A' με $(\alpha'_{1k})^{-1}$ και παίρνουμε τον

$$A'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1_F & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \alpha''_{2k} & * & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha''_{\nu k} & * & & * \end{bmatrix}$$

Υποβήμα 3: Για $i = 2, 3, \dots, \nu$ κάνω διαδοχικά στον A'' τις γραμμοπράξεις $r_i \to r_i - \alpha''_{ik} \cdot r_1$. Καταλήγουμε στον πίνακα

$$A''' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1_F & * & * & * \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & B & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Τώρα εφαρμόζουμε επαγωγικά τον αλγόριθμο στο B. Η διαδικασία τελειώνει γιατί ο B έχει λιγότερες στήλες από τον A. Τελικά καταλήγουμε σε $C \in F^{\nu\cdot\mu}$ κλιμακωτό.

$$\begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&3&5\\0&0&5&6\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&0&-1\\0&0&5&6\end{bmatrix} \xrightarrow{(*)} \begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&0&-1\\0&0&0&-4\end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -1\cdot r_2} \begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&-4\end{bmatrix}$$

$(*)$ $r_3 \to r_3 - 5r_1$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + 4r_2} \begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \leftarrow$$ κλιμακωτός, όχι ισχυρά κλιμακωτός

Βήμα 2. Ο C είναι της μορφής $C = \begin{bmatrix}0\ldots0 & 1 & *\ldots* & \alpha_{1l} & *\ldots*\\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 1 & * \\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & \\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & \end{bmatrix}$

Με γραμμοπράξη $r_1 \mapsto r_1 - \alpha_{1l}\cdot r_2$ στο C καταλήγουμε στον πίνακα $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & *\ldots* & 0\\ & 0 & 0 & \vdots & *\end{bmatrix}$. Συνεχίζουμε με επαγωγή καταλήγουμε σε $DEF^{v.t}$ ΙΣΧΥΡΑ ΚΛΙΜΑΚΩΤΟ.

<u>Παράδειγμα</u> Υποβήμα 1

$$\begin{bmatrix}0&3\\1&5\end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix}1&5\\0&3\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Υποβήμα 3}]{r_2 \to \frac{1}{3}r_2} \begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}$$

ΚΛΙΜΑΚΩΤΟΣ, ΟΧΙ ΟΜΩΣ ΙΣΧΥΡΑ.

$$\xrightarrow[\text{Βήμα 2ο}]{r_1 \mapsto r_1 - 5r_2} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Υπενθύμιση: $A \in F^{\nu \times \mu}$ ΤΥΠΟΣ I: $r_i \mapsto \lambda \cdot r_i$ όπου $i \in \{1, \dots, \nu\}$, $\lambda \in F \setminus \{0\}$.

ΤΥΠΟΣ II $r_i \mapsto r_i + \lambda r_j$ όπου $i,j \in \{1 \dots \nu\}$, $i \neq j$, $\lambda \in F$

ΤΥΠΟΣ III : $r_i \leftrightarrow r_j$ όπου $i,j \in \{1 \dots \nu\}$, $i \neq j$

Ορισμός: i) (Για τύπο I) Για $i \in \{1, \dots \nu\}$ και $\lambda \in F \setminus \{0\}$ ορίζουμε $M_i(\lambda) \in F^{\nu \cdot \nu}$ ως εξής $M_i(\lambda)$ έχει στοιχεία

$$\begin{cases} 0_F \text{ εκτός διαγωνίου} \\ 1_F \text{ στη θέση } (\alpha,\alpha) \text{ με } \alpha \neq i \\ \lambda \text{ στη θέση } (i,i) \end{cases}$$

Παράδειγμα: Για $\nu = 3$

$$M_2(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 7$ κ' $i = 2$

Για $\nu = 3$

$$M_1(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Χρησιμότητα $A \xrightarrow{r_i \to \lambda r_i} B$ τότε $B = (M_i(\lambda))A$

ii) Για τύπο II Για $i,j \in \{1, \dots \nu\}$ με $i \neq j$ και $\lambda \in F$

Ορίζουμε $M_{ij}(\lambda) \in F^{\nu \times \nu}$ με στοιχεία $\begin{cases} 1_F \text{ στην κύρια διαγώνιο} \\ \lambda \text{ στη θέση } (i,j) \\ 0_F \text{ αλλού} \end{cases}$

π.χ. Για $\nu = 3$

$$M_{13}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} \in F^{3 \times 3}$$

Χρησιμότητα $A \xrightarrow{r_i \to r_i + \lambda r_j} B$ τότε $B = [M_{ij}(\lambda)] \cdot A$

Ορισμός: i Για κάθε $i,j \in \{1,\dots,\nu\}$ με $i \neq j$ ορίζουμε τον πίνακα $M_{ij} \in F^{\nu \times \nu}$ με στοιχεία $\begin{cases} 1_F & \text{στις θέσεις } (i,j) \text{ και } (j,i) \\ 1_F & \text{στις θέσεις } (\alpha,\alpha) \text{ για } \alpha \neq i, \alpha \neq j \\ 0_F & \text{αλλού} \end{cases}$

π.χ. για $\nu=4$ $M_{24} \in F^{4\times 4}$

$$M_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Γενικά $M_{ij} \in F^{\nu \cdot \nu}$ προκύπτει από τον $I_\nu \in F^{\nu \cdot \nu}$ με εναλλαγή i,j γραμμών.

Παράδειγμα: Έστω $\nu=2$, $\mu=3$ $A = \begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in F^{2\times 3}$.

Έστω $\lambda \in F - \{0\}$. Τότε $M_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ και

$$M_2(\lambda)\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{bmatrix}$$

Έστω $\lambda \in F$. Τότε $M_{21}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$ και $[M_{21}(\lambda)]A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ d+\lambda\alpha & e+\lambda b & f+\lambda c \end{bmatrix}$$

$r_2 \to r_2 + \lambda r_1$

$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in F^{2\times 2}$ και $M_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ \alpha & b & c \end{bmatrix}$

Πρόταση: $A \in F^{\nu \cdot \mu}$ ~~i) Τότε~~

i) Θέτουμε B με $A \xrightarrow{r_i \to \lambda r_i} B$ Τότε $B = (M_i(\lambda))\cdot A$

ii) Θέτουμε C με $A \xrightarrow{r_i \to r_i + \lambda r_j} C$ Τότε $C = (M_{ij}(\lambda))A$

iii) Θέτουμε D με $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} D$. Τότε $D = M_{ij}A$

Ορισμός: Οι πίνακες $M_i(\lambda)$, $M_{ij}(\lambda)$, M_{ij}, λέγονται στοιχ
πίνακες.